Đề Olympic Toán Quốc tế - IMO 2017

Thứ Ba, ngày 18 tháng 7 năm 2017

Bài 1. Với mỗi số nguyên $a_0 > 1$, xét dãy số nguyên dương $a_0, a_1, a_2, \ldots$ xác định bởi:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{nếu } \sqrt{a_n} \text{ là số nguyên,} \\ a_n + 3 & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

với mỗi số nguyên $n \geq 0$.

Hãy xác định tất cả các số a_0 sao cho tồn tại số A mà $a_n = A$ với vô hạn số n.

Bài 2. Kí hiệu $\mathbb{R}$ là tập số thực. Hãy tìm tất cả các hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x và y,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Bài 3. Một cô thợ săn và một con thỏ tàng hình chơi trò chơi sau trên mặt phẳng. Điểm xuất phát A_0 của con thỏ và điểm xuất phát B_0 của cô thợ săn trùng nhau. Sau $n-1$ lượt chơi, con thỏ ở điểm A_{n-1} và cô thợ săn ở điểm B_{n-1}. Ở lượt chơi thứ n, có ba điều lần lượt xảy ra theo thứ tự dưới đây:

(i) Con thỏ di chuyển một cách không quan sát được tới điểm A_n sao cho khoảng cách giữa A_{n-1} và A_n bằng đúng 1.

(ii) Một thiết bị định vị thông báo cho cô thợ săn về một điểm P_n, đảm bảo khoảng cách giữa P_n và A_n không lớn hơn 1.

(iii) Cô thợ săn di chuyển một cách quan sát được tới điểm B_n sao cho khoảng cách giữa B_{n-1} và B_n bằng đúng 1.

Hỏi điều sau đây sai hay đúng: cho dù con thỏ có di chuyển như thế nào và các điểm được thiết bị định vị thông báo có là những điểm nào, cô thợ săn luôn có thể chọn cho mình cách di chuyển sao cho sau 10^9 lượt chơi, cô ta có thể khẳng định chắc chắn rằng khoảng cách giữa mình và con thỏ không vượt quá 100?

Bài 4. Cho R và S là hai điểm phân biệt trên đường tròn Ω sao cho RS không phải là đường kính. Cho ℓ là tiếp tuyến tại R của Ω. Lấy điểm T sao cho S là trung điểm của đoạn thẳng RT. Lấy điểm J trên cung nhỏ $\overset{\frown}{RS}$ của Ω sao cho đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác JST cắt ℓ tại hai điểm phân biệt. Gọi A là giao điểm gần R nhất của Γ và ℓ. Đường thẳng AJ cắt lại Ω tại K. Chứng minh rằng KT tiếp xúc với Γ.

Bài 5. Cho số nguyên $N \geq 2$. Có $N(N + 1)$ cầu thủ bóng đá, trong đó không có hai người nào có cùng chiều cao, đứng thành một hàng ngang. Ngài Alex muốn đưa $N(N - 1)$ cầu thủ ra khỏi hàng sao cho ở hàng ngang mới nhận được, gồm $2N$ cầu thủ còn lại, N điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

(1) không có cầu thủ nào đứng giữa hai cầu thủ cao nhất,

(2) không có cầu thủ nào đứng giữa cầu thủ cao thứ ba và cầu thủ cao thứ tư,

$\vdots$

(N) không có cầu thủ nào đứng giữa hai cầu thủ thấp nhất.

Chứng minh rằng Ngài Alex luôn có thể làm được điều đó.

Bài 6. Cặp có thứ tự các số nguyên (x, y) được gọi là ***điểm nguyên thủy*** nếu ước số chung lớn nhất của x và y bằng 1. Cho tập S gồm hữu hạn điểm nguyên thủy. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n và các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho với mỗi điểm (x, y) thuộc S, ta có:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Language: Vietnamese

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm